

Gruppenübung 6

Aufgabe 1 Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Gesucht ist der Regler

$$J = \int_0^\infty x^T \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x + u^2 dt$$

minimiert. Welchen Wert nimmt das Kostenfunktional für die Anfangsbedingung $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ an?

Hinweis: Das erste Diagonalelement der Lösung P der Riccati Gleichung hat den doppelten Wert des Nebendiagonalelements.

Lösung:

Riccati Gleichung für $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ liefert

$$-6p_1 + 4p_2 - p_2^2 + 9 = 0$$

$$3p_1 - 7p_2 - p_2p_3 + 2p_3 = 0$$

$$6p_2 - 8p_3 - p_3^2 + 3 = 0$$

Positiv definite Lösung der Gleichungen:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$J_{opt} = x_0^T P x_0 = 5$$

Aufgabe 2 Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} u$$

mit $b_0 \in \mathbb{R}$ und das Kostenfunktional

$$J = \int_0^\infty x^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x + u^2 dt.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösung der Riccati Gleichung für $b_0 = 1$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

lautet.

Lösung:

$$\begin{aligned} 0 &= PA + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie für $b_0 = 1$ den Regler $u = -Kx$, der das Kostenfunktional minimiert.

Lösung:

$$u = -(2 \quad 5)x$$

- c) Geben Sie das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises an in Abhängigkeit von b_0 , falls der mit $b_0 = 1$ berechnete Regler verwendet wird.

Lösung:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (10 + 5b_0)\lambda + (60b_0 - 24)$$

- d) Für welche Werte von b_0 ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil? Ist dieses Ergebnis überraschend?

Lösung:

$$b_0 > \frac{2}{5} = 0,4$$

Der LQ-Regler hat eine garantierte Amplitudenreserve von $(\frac{1}{2} \dots \infty)$, d. h. es war zu erwarten, dass Stabilität für $b_0 > \frac{1}{2}$ vorliegt. Es lässt sich jedoch nicht a priori sagen, dass der Kreis für $b_0 \leq \frac{1}{2}$ instabil ist!

Aufgabe 3 Gegeben sei das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=b} u.$$

und das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty [(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^2 + k u^2] d\tau,$$

mit $c_1 \neq 0$ und $k > 0$.

- a) Bestimmen Sie die Matrizen Q und R für das Gütekriterium in der Form $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) d\tau$.

Lösung:

$$Q = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{pmatrix} \quad R = k.$$

- b) Ergibt sich aus der Riccati-Gleichung ein eindeutiger und stabilisierender Regler?

Lösung:

Einen eindeutigen und stabilisierenden Regler kann man mit der Riccati-Gleichung erhalten, wenn das Paar (A, b) stabilisierbar und das Paar (A, M) mit $M^T M = Q$ entdeckbar ist. Das Paar $[A, b]$ ist stabilisierbar und das Paar (A, M) mit $M = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ ist wegen $c_1 \neq 0$ entdeckbar (Hautus-Test). Daher kann ein eindeutiger und stabilisierender Regler mittels der Riccati-Gleichung berechnet werden.

- c) Der LQR Regler wird durch $u = kx$, $k = -R^{-1}b^T P$ beschrieben. Sind die folgenden Matrizen im Prinzip mögliche Lösungen für den Regler K ? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$(i) \quad P = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.31 & 0.25 \\ 0.29 & 0.21 & 0.45 \\ 0.45 & 0.25 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad P = \begin{pmatrix} 2.16 & 0.60 & 0 \\ 0.60 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad P = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.42 & 0.31 \\ 0.42 & 0.1 & 0.23 \\ 0.31 & 0.23 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- (i) Nein. Nicht symmetrisch.
- (ii) Ja. Im Prinzip möglich.
- (iii) Nein. Nicht positiv definit.
- (iv) Ja. Im Prinzip möglich.